A megértés koordináta rendszerei

Egri-Nagy Attila

www.egri-nagy.hu

2005. november 25.

A lényeg röviden

Bármely véges rendszerhez automatikusan generálható egy működő hierarchikus modell.

Alapvető fogalmak – filozófiai bevezetés

Mi a modell?

Bármely rendszer, ami nem a vizsgált dolog maga, de a kutatott jelenség alaptulajdonságai megtalálhatók benne. A modelltől azt is elvárjuk, hogy valamilyen tekintetben egyszerűbb legyen (az 1:1 léptékű térkép nem túl hasznos).

Működő modell?

Nem csak a statikus szerkezetet szeretnénk modellezni, hanem a folyamatokat is.

Darabokra szedés

A mai napig a tudomány fő kutatási iránya a dolgok részekre szedése, ahol a komponensek egyszerűbbek mint maga az egész. Felsoroljuk egy adott dolog alkotóelmeit, de ez még csak a munka kisebb része.
De hogyan rakjuk össze az építőelemeket?

Hierarchiák mindenhol

„Minden kapcsolatban van minden mással, de némely dolgok jobban kapcsolódnak"

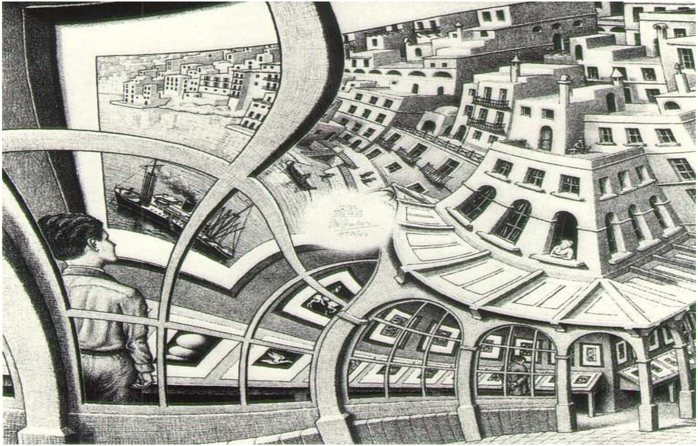
Herbert Simon

- fizikai világ felépítése: kvarkoktól a galaxisokig, térbeli és méretbeli hierarchiák
- programozás: eljárások egymásba ágyazása, objektum-orientált osztálydiagramok
- szociális kapcsolatok: alá s fölérendeltségi viszonyai
- ...

A hierarchia előnyei

- Egy hierarchikus rendszeren belül az *általánosítás* művelete igen egyszerű, csak el kell tekintenünk a mélyebb szintektől. A *specializáció* ugyanígy adódik a fordított irányú művelettel: egyre mélyebb szinteket is figyelembe veszünk.
- A szintek közötti *minimális információ átvitel* és az egy szinten belüli párhuzamosíthatóság miatt a rendszer moduláris, bizonyos komponensek a többitől függetlenül cserélhetők.

Kint vagy bent?



M.C. Escher: *Print Gallery* 1956.

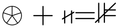
Kint vagy bent? Filozófiailag...

A hierarchia vajon a külső világ tulajdonsága, vagy „csak” saját - igen hatékony - kognitív eszközünk?

Elég a bent! Pl.

A számok helyiértékkel történő jelölése rendkívül hasznos eszköz.
Algoritmikusan kezelhető reprezentáció

Nélküle hatalmas szimbólumtáblázatokat kellene megtanulnunk



ahelyett, hogy

$$147 + 532 = 679$$

Koordináta rendszer

Koordináta rendszeren egy olyan jelölési rendszert értünk (a lehető legtágabb értelemben), mellyel egy rendszer dekompozíciójának komponenseit tudjuk „megcímezni”.

Pl.

- Nem-hierarchikus: az euklidészi tér koordináta rendszere
- Hierarchikus: tízes alap helyiértékes számjelölő rendszerünk, fizikai leírások paraméterei - megmaradó mennyiségek

A végső cél

Bármely véges rendszerből (megfigyelési adatok, a robot érzékelőin keresztül gyűjtött információk, stb.) automatikusan generáljuk annak egy hierarchikus modelljét, koordináta rendszerét („megértését”), amely könnyen manipulálható, predikciókat szolgáltat, valamint az eredeti jelenség komplexitásáról is ad információt.

Algebrai automata elmélet – számítási struktúrák felbontása

A prímtényezős felbontás metaforája

	Egész számok	Automaták
Elemek	Prímszámok	Flip-flop és csoportautomaták
Összerakás	Szorzás	Kaszkád (Koszorú) szorzat
Pontosság	Egyenlőség	Emuláció

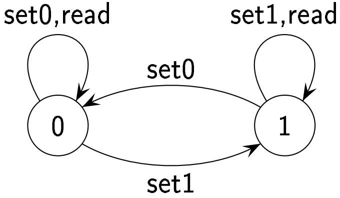
Automaták

Az automaták az állapotváltozás fogalmát ragadják meg matematikailag.

- A állapotok halmaza
- X bemeneti szimbólumok halmaza
- $\delta : A \times X \to A$ állapotátmenet függvény

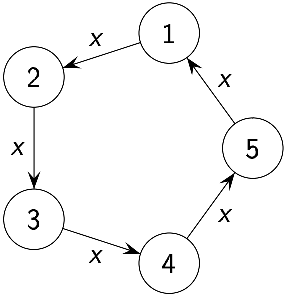
Flip-flop automata

1 bit tárolására alkalmas.



Számláló

Állapothalmaz: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
Bemeneti szimbólumok: $X = \{x\}$



Komputációs folyamatok típusai

- Irreverzibilis, pl. egy memóriaterület felülírása más adattal
- Reverzibilis

A különbség jobban látható, ha az automatákról algebrai nyelven beszélünk.

Csoportelmélet

Az algebrai absztrakt csoport fogalma a szimmetriát ragadja meg matematikailag.
G halmaz asszociatív bináris művelettel $\cdot : G \times G \to G$, egységelemmel $1 \cdot g = g \cdot 1 = g$, s minden elemhez inverz elemmel $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$.

Félcsoportelmélet

A félcsoport a csoport fogalmának általánosítása.
S halmaz asszociatív bináris művelettel. Asszociativitás:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- Rengeteg van belőlük: 1.8 billió nem-equivalens félcsoport, $|S| = 8$.
- A kevesebb több: minden csoport félcsoport is egyben.
- Minden véges számítást reprezentálni tudnak.
- Az asszociativitásnak köszönhetően az idő egyik modelljeként is felfogható.

Félcsoport példák

- $(\mathbb{N}, +)$, 0 az egységelem
- $(\mathbb{Z}, +)$, 0 az egységelem, van inverz minden elemhez $n + (-n) = 0$, tehát csoport is egyben
- $(\mathbb{N}, \cdot)$, 1 az egységelem
- $(\{a, b\}, \circ)$

$\circ$	**a**	**b**
a	a	b
b	a	b

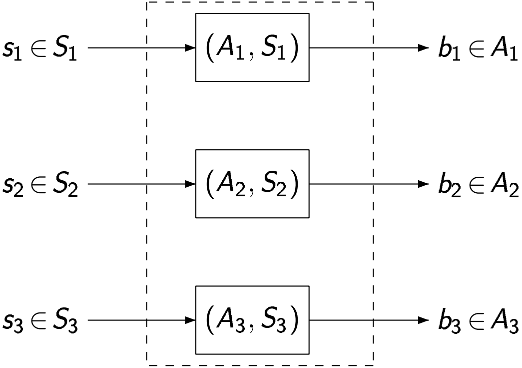
Transzformációs félcsoport

Hogyan lesz az automatából félcsoport? (A, S)
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, S = \{x, x^2, x^3, x^4, x^5 = 1\}$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

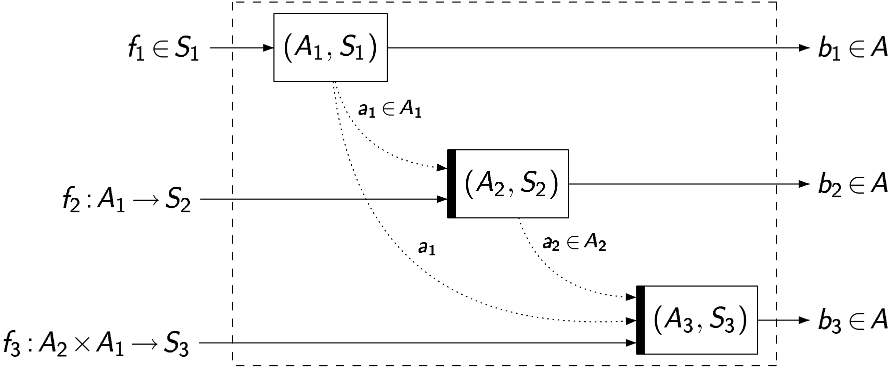
Parallel kompozíció



$(A_3, S_3) \times (A_2, S_2) \times (A_1, S_1)$

$(a_3, a_2, a_1) \cdot (s_3, s_2, s_1) = (b_3, b_2, b_1) = (a_3 \cdot s_3, a_2 \cdot s_2, a_1 \cdot s_1).$

Kaszkád kompozíció

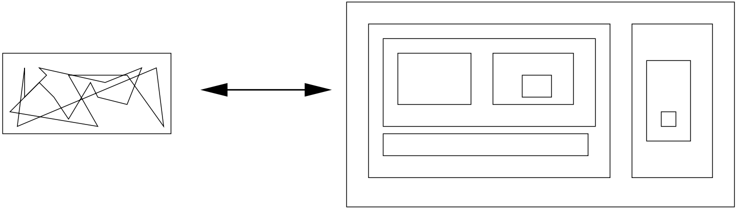


$(A_3, S_3) \wr (A_2, S_2) \wr (A_1, S_1)$

$(a_3, a_2, a_1) \cdot (f_3, f_2, f_1) = (b_3, b_2, b_1) = (a_3 \cdot f_3(a_2, a_1), a_2 \cdot f_2(a_1), a_1 \cdot f_1)$

Emuláció

(B, T) emulálja (A, S)-t, ha (A, S) bármely számítása végrehajtható (B, T)-ben. (Algebrai terminológiával: (A, S) osztja (B, T)-t.)



(A, S) $\qquad$ $(B_1, T_1) \wr \ldots \wr (B_n, T_n)$

Egy véges automata $\mathcal{A}$ emulálható egyszerűbb komponensek kaszkád szorzatával. A komponensek a flip-flop automata és azon csoportautomaták, melyeket $\mathcal{A}$ szimulálni képes. (S fordított irányban is: ha felépíthető valamey komponensekből, akkor azok mindegyikét emulálja $\mathcal{A}$).

Alkalmazások – Ígéretek és nehézségek

bizonyítások $\simeq$ algoritmusok

- $V \cup T$ (Krohn, Rhodes, 1962)
- Holonomy (Zeiger 1968, Eilenberg 1976)
- Categories (Rhodes, Weil, 1989)
- Semigroup expansions (Rhodes 1991)
- $\mathcal{L}^+$ decomposition (Nehaniv, 1996)
- Kernels (Ésik 2000)
- Holonomy (Elston, Nehaniv 2002)

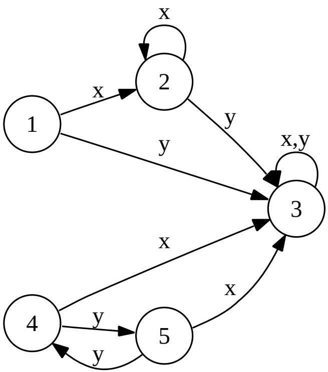
De egészen mostanáig nem volt számítógépes implementáció.

Miért?!?

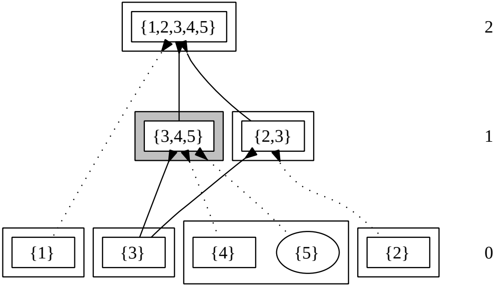
- A nehézségek a matematikában vannak, de a motiváció kívülről jön. Interdiszciplináris megközelítésre van szükség.
- A számítógépek teljesítménye az elmélet létrejöttekor nem volt elegendő.
- Nehéz számolni félcsoportokkal (nagyon sok elemmel kell dolgozni).

Beware of Combinatorial Explosions!!!

Véletlen automata...



...és holonómia felbontása



$$(\mathbf{2}, \overline{1}) \times (\mathbf{2}, \overline{C_2}) \wr (\mathbf{3}, \overline{1})$$

Komplexitás mérése

A hierarchikus felbontás hossza megegyezik az eredeti rendszeren belüli maximális funkcionális függési lánc hosszával.
Ez a komplexitás mérték axiomatizálható (pl. parallel kompozíció esetén a komponensek komplexitásának maximuma, kaszkád szorzat esetén összegük a komplexitás értéke).

A megértés formális elméletei

Az automatikusan generált koordináta rendszer megvalósíthahtja a dinamikus reprezentációt a mesterséges intelligenciában. Bár egyelőre nem nagyon tudunk számolni a koordinátákkal.
A matematikán magán belül már sikerrel használtuk.

Köszönöm a figyelmet!

`http://graspermachine.sf.net`